

# الطرائق العددية لحل مسألة المعادلات الخطية:

يفرض علينا مجموعة المعادلات الخطية التالية:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

(1)

هذه المسألة تكون من  $n$  معادلات و  $n$  مجهول. نكتب هذه المجموعة بالرمز:

$$AX = B$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$X = (x_1, \dots, x_n)$$

$$B = (b_1, \dots, b_n)$$



هناك نوعان من الماتريسات:

[1] النوع الأول: هو الماتريسة التي يكون فيها كل صف من صفوفها يحتوي على صف واحد من الماتريسة  $A$  كمتجه.

[2] النوع الثاني: هو الماتريسة التي يكون فيها كل صف من صفوفها يحتوي على صف واحد من الماتريسة  $A$  كمتجه، ولكن الصف الأول من الماتريسة  $A$  هو المتجه الصف الأول من الماتريسة  $A$ .

قبل البدء بهذه الماتريسات لابد من معرفة مفهوم الماتريسة:

معرفة:

نقول أن الماتريسة  $A$  هي مجموعة الماتريسات الخطية (أي الماتريسات التي يكون فيها كل صف من صفوفها يحتوي على صف واحد من الماتريسة  $A$  كمتجه) إذا كانت  $A$  متساوية رتبة، أي  $\text{rang } A = \text{rang } (A^T)$ ، فإن الماتريسة  $A$  هي الماتريسة المربعة (أي الماتريسة التي يكون فيها كل صف من صفوفها يحتوي على صف واحد من الماتريسة  $A$  كمتجه).

الماتريسة المباشرة: هي الماتريسة التي يكون فيها كل صف من صفوفها يحتوي على صف واحد من الماتريسة  $A$  كمتجه.

هناك نوعان من الماتريسات:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$$

[1] المباشرة:

حيث  $\Delta = |A|$  و  $i = 1, 2, \dots, n$



### تحليل عددي (7<sup>م</sup> تقرير)

1.  $\Delta$  هو  $\Delta$  بعد تبديل العود رقم  $\Delta$  العود الثالث

### 2. معادله المصفوفة:

$$A^{-1} A X = A^{-1} B \quad \Leftarrow \quad A X = B$$

$$I X = A^{-1} B$$

$$X = A^{-1} B$$

لبناء حل خط المعادلات  $\Delta$  كما نرى في جدول معادلات المصفوفة المثال  
مصفوفة  $\Delta$  العود الثالث

### 3. غاوس

لنعتبر لدينا مجموعة المعادلات الخطية (1)  
نختار طريقة غاوس بالمثل الأول: نجد الحل على مجموعة من المراحل:  
في المرحلة الأولى:

نم حذف الصف الأول مثال  $\Delta$  من جميع المعادلات باستثناء المعادلات  
الأولى:

وفي الثانية:  
نم حذف الصف الثاني  $\Delta$  من جميع المعادلات باستثناء المعادلات 1 و 2  
و هكذا بالترتيب حتى نحصل على مجموعة من المعادلات الخطية 1 المتكافئة  
للمجموعة D. ومصفوفة الشكل

فإذا كانت لدينا مجموعة المعادلات 1. نجد مجموعة من المعادلات  
بعد n من المراحل:



$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}$$

$$a_{n1}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)}$$

هذه مجموعة المعادلات  $n-1$  وهذا الحل  
ومن المعادلات الأخيرة نكتب  $x_n$   
بالتبديل بالتى ستبقها قبل  $x_{n-1}$  وهكذا بالتالى حتى نصل الى  
المعادلة الاولى.

مثال

نقرض لدينا مجموعة المعادلات الخطية الآتية:

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

$$-x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -1$$

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1$$

او بطريقة عامه على مجموعة المعادلات الآتية:

الحل:



تحليل محدود **الم 7 نظام**

في المرحلة الأولى تم حذف  $x_1$  من المعادلات الأخيرة. وذلك بأنه  
بموجب المعادلة الأولى بـ 2 - ونضيفها إلى الثانية ثم نجمع الأولى  
مع الثانية فنحذف  $x_1$  بـ 3 - ونضيفها مع الرابعة فنحصل على مجموعة  
المعادلات:

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2$$

$$-3x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -3$$

$$2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 1$$

$$+4x_2 + 5x_3 - 6x_4 = -5$$

في الخطوة الثانية حذف  $x_2$  من المعادلات الثانية والرابعة  
بذلك نحذف الثانية بـ  $\frac{2}{3}$  ثم من جديد  $\frac{4}{3}$  نحذف الثانية بـ  $\frac{4}{3}$   
ونضيفها إلى المعادلة الأخيرة:  
نحصل على:

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2$$

$$-3x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -3$$

$$-x_3 = -1$$

$$x_3 = 1$$

في الخطوة الأخيرة نجمع المعادلتين 3 و 4 فنحصل على معادلة الرتبة 1:



الحقيقة المكافئة مثلثة الشكل التالية :

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0$$

$$-3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -3$$

$$-x_3 = -1$$

$$-2x_4 = -2$$

$$x_2 = 1$$

$$x_4 = 1$$

⇒

$$x_1 = 1$$

$$x_3 = 1$$

وهو حل المعادلات الخطية المفروضة.

**ملاحظة:**

حيث أن كثير من مسائل المعادلات لا يمكن حلها بطريقة مباشرة.

في إيجاد عدد ما هذه الطريقة

من المعنوية A:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \cdot (-3) \cdot (-1) \cdot (-2) = -6$$

**مثال:**

أو هو طريقة أخرى لحل مجموعة المعادلات المتساوية في المتغيرات

في هذه الحالة



### تحليل عددية (7<sup>م</sup>) تشرية

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = -3$$

$$-x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 7$$

$$3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1$$

$$4x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 1$$

ثم استنتج قيمة المحدد

### 4 تحليل العوامل U لها :

فهي هذه الطريقة التحليل مصفوفة المصفوفات A في المجموعة الخطية :

$$AX = B$$

والجدول مصفوفة مثلثية بالـ P

الآن L : مصفوفة مثلثية سفلية

والثانية U : مصفوفة مثلثية عليا

بعد التحليل نوجد الحل على مبرهنات :

$$① LY = B$$

$$Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$$

$$② UX = Y$$

X هو الحل

سواء المصفوفة A :



$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

$L$

$U$

نلاحظ أن عدد عناصر المصفوفة  $A$  هو  $n^2$ .

عدد عناصر  $L$  هو  $n^2$ .

$$n^2 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1) = n^2 + n.$$

$$u_{11} = u_{22} = \dots = u_{nn} = 1. \quad \text{تفريعاً:}$$

$$l_{11} = l_{22} = \dots = l_{nn} = 1.$$

نجدها

عند قيمة العناصر

من خلال البرهان الرياضي.



قالب عددية  $U_{ij}$

$$L_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} U_{kj}$$

$$U_{ij} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} U_{kj}) / L_{ii}$$

يتم تطبيق هذه العملية عندما  $i \neq j$

$$i=1 \Rightarrow U_{1j} = \frac{a_{1j}}{L_{11}}$$

هذا المستوي:  
نقوم بحساب العود الأول من المصفوفة  $L$  ثم نحسب السطر الأول من  $U$   
فعود  $L$  المصفوفة  $L$  ونحسب العود الثاني وهكذا ثم ننقل إلى الحساب السطر 2  
على  $U$  وهكذا

مثال:

أريد بحسبة قالب الاعداد  $L$  و  $U$  من المصفوفة التالية:

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4$$

$$3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -3$$

$$+ 2x_1 - x_2 + x_3 = 4$$

الحل:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{pmatrix}$$



تفرضه:

$$U_{11} = U_{22} = U_{33} = 1$$

$$L_{11} = a_{11} = 1 \quad L_{21} = a_{21} = 3$$

$$L_{31} = a_{31} = 2$$

نفس الطريقة:

$$U_{12} = \frac{a_{12}}{L_{11}} = 2$$

$$U_{13} = \frac{a_{13}}{L_{11}} = -3$$

$$L_{22} = a_{22} - L_{21} U_{12} = 2 - 3(2) = -4$$

$$L_{32} = a_{32} - L_{31} U_{12} = -1 - 2(2) = -5$$

$$U_{23} = \frac{(a_{23} - L_{21} U_{13})}{L_{22}} = \frac{(-4 - 3(-3))}{-4} = \frac{-5}{4}$$

$$L_{33} = a_{33} - L_{31} U_{13} - L_{32} U_{23}$$

$$= 1 - 2(-3) - (-5)\left(\frac{-5}{4}\right)$$

$$= 1 + 6 - \frac{25}{4} = \frac{3}{4}$$



تحليل عددي  $\hat{P}$  نظري

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 2 & -5 & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$L \quad U$

توجد الحل على مرحلتين:

$$LY = B$$

(1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 2 & -5 & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = -4$$

$$3y_1 - 4y_2 = -3$$

$$2y_1 - 5y_2 + \frac{3}{4}y_3 = 4$$

$$X = \begin{pmatrix} -4 \\ -9/4 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (الحل النهائي)}$$



(2)

$$UX = Y$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -\frac{9}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X_1 + 2X_2 - 3X_3 = -4$$

$$X_2 - \frac{5}{4}X_3 = -\frac{9}{4}$$

$$X_3 = 1$$

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

هو الحل

مثال:

أوجد بطريقة التفاضل أو عوامل حل مجموعة المعادلات الخطية التالية:



تحليل عددي (أكبر قدر)

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$$

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 = -3$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = -2$$

مثال:

أوجد بطريقة القابل إلى عظامه حل مجموعة المعادلات في  
أيضا بطريقة عظامه

$$x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 3$$

$$-2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 1$$

$$3x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0$$

الطريقة القياسية لحل مجموعة المعادلات:

نبدأ من هذه الطريقة بالطريقة القياسية نستخدم عندنا عدد المعادلات كبيراً

طريقة القياسية المتكاملة البسيطة:

لنضع هذه الطريقة من أجل ثلاث معادلات فيكون لدينا ثلاث معادلات  
مجموعة المعادلات:



$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

نقول  $x_1$  من المعادلة الأولى و  $x_2$  من المعادلة الثانية و  $x_3$  من المعادلة الثالثة

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}} [b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3]$$

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}} [b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3]$$

$$x_3 = \frac{1}{a_{33}} [b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2]$$

وهي صيغة التكرارية من أجل صيغة غير خطية. المعادلات التكرارية:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}} [b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}]$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}} [b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)}]$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}} [b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)}]$$



تحليل عددي أمثلة

نفسه أمثلة أخرى:

$$X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})$$

نفسه أمثلة أخرى: تحليل عددي أمثلة

$$X^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)})$$

الحل التقريبي التالي:

$$X^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)})$$

وهكذا بالأسلوب نفسه على جميع الحلول التقريبية

$$X^{(0)}, X^{(1)}, \dots, X^{(n)}$$

لـ  $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X^{(n)} = X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$$

$$|X^{(k+1)} - X^{(k)}| < \epsilon, \quad \epsilon > 0$$

$$X^* \approx X^{(k+1)}$$

مثال

أوجد بطرق التقريبية المتتالية السلسلة حل عددي  
المعادلات الخطية الرئيسية:



$$10x_1 + x_2 + x_3 = 12$$

$$x_1 + 10x_2 + x_3 = 12$$

$$x_1 + x_2 + 10x_3 = 12$$

الحل:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{10} [12 - x_2^{(k)} - x_3^{(k)}]$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{10} [12 - x_1^{(k)} - x_3^{(k)}]$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{10} [12 - x_1^{(k)} - x_2^{(k)}]$$

$$x^{(0)} = (0, 0, 0)$$

$$x^{(1)} = (1.2, 1.2, 1.2)$$

$$x^{(2)} = (0.96, 0.96, 0.96)$$

$$x^{(3)} = (1.008, 1.008, 1.008)$$

وفلذلك باستمرار فوجدت قيمة الحل هي 1.008  
هنا باستخدام الطريقة التكرارية قد تقارب الحل من الحل الحقيقي  
معقد نسبيًا مع والكمبيوتر يتعامل بنظام المحسوبة (4) الناتجة عن تحويل  
مجموع المتادلات الحقيقية للكل المتادلات



تحليل عددية  $A$  كـ  $\alpha$  تقريبية

$$X = \beta + \alpha X$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & a_{11} \\ b_2 & a_{22} \\ b_3 & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-a_{12}}{a_{11}} & \frac{-a_{13}}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \frac{-a_{23}}{a_{22}} \\ \frac{-a_{31}}{a_{33}} & \frac{-a_{32}}{a_{33}} & 0 \end{pmatrix}$$

يتقارب الحل بـ  $\alpha$  التقريبات المتتالية إذا كانه تقليم بالصفوف  $\alpha$   
 أصغر من 1  $\|\alpha\| < 1$   
 يمكننا أن نذكر أن هذا النظام هو صفوي  $\alpha$  أصغر من 1  
 هناك مجموعة من الأنظمة للصفوف  $\alpha$  :

مفهوم تقليم صفوي

التقليم هو عبارة عن قيمة حقيقية غير سالبة ويرمز لها بالرمز  $\|\alpha\|$   
 تحقق الشرط الآتي :

$$A = 0 \Leftrightarrow \|A\| = 0 \text{ و } \|A\| \geq 0$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$$



$$\textcircled{3} \forall A, B \Rightarrow \|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

$$\textcircled{4} \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

النظم المتعددة الحدود:

$$\textcircled{1} \|A\|_1 = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

$$\textcircled{2} \|A\|_2 = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2$$

$$\textcircled{3} \|A\|_p = \left( \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|A\| = \left( \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

أمثلة لنسبة المتجهات هذه مجموعة نظام

$$\|x\|_1 = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

$$\|x\|_2 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$



مثال 4:

أوجد النظم الأول والثاني والثالث للصيغة التالية:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_I = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = \max(7, 10, 7, 10) = 10$$

$$\|A\|_{II} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = \max(6, 7, 10, 11) = 11$$

$$\|A\|_{III} = \left( \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{90} \approx 9.48$$

لتكن متطابق إلى أي حد أريد نظام  $\alpha > 1$ .

انتهت المحاضرة 7  
بالقصر للبحر